

УДК 517.954

ЗАДАЧИ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

*М. Ю. Шалагинов*¹, *М. Г. Иванов*², *М. В. Долгополов*³¹ Университет Пурдю, США, Индиана, 47907, Уэст-Лафайетт.² Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700, Долгопрудный, Московской обл., Институтский пер., 9.³ Самарский государственный университет, 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mails: shalaginov@purdue.edu, mgi@mi.ras.ru, mvdolg@ssu.samara.ru

Работа посвящена рассмотрению задач, связанных с оператором Лапласа на топологических поверхностях, таких как лист Мёбиуса, бутылка Клейна и тор. В частности, обсуждаются колебания на поверхности листа Мёбиуса, собственные функции и собственные значения оператора Лапласа на поверхности бутылки Клейна, а также поведение заряженной частицы на поверхности «бублика» в присутствии магнитного поля.

Ключевые слова: *квантовая физика, неевклидовы топологические поверхности, квантование, оператор Лапласа, лист Мёбиуса, бутылка Клейна, тор.*

Введение. Во многих задачах теоретической и математической физики используются фундаментальные уравнения, содержащие оператор Лапласа (лапласиан). Примерами таких уравнений являются волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнения Шредингера, Лапласа, Пуассона и так далее. Обычно задачи, связанные с лапласианом, рассматриваются для привычных геометрических объектов, таких как прямая, отрезок, окружность, плоскость, цилиндр, шар.

В настоящей работе идёт речь о задачах, где оператор Лапласа определён на необычных топологических [1] объектах: лист Мёбиуса, бутылка Клейна и тор. В трёхмерном пространстве их поверхности можно получить из прямоугольника, склеив определённым образом его края (см. рис. 1, 3, 5). Таким образом, нестандартность таких задач заключается главным образом в граничных условиях для функций, определённых на прямоугольной части плоскости, на которой ищутся собственные функции лапласиана. Рассматриваемые задачи имеют одинаковый механизм решения, но преднамеренно сформулированы по-разному из чисто методических соображений.

1. О постановке задачи. Рассматриваемые задачи с оператором Лапласа на топологических поверхностях в общем виде сводятся к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0, \\ B[u] = 0. \end{cases}$$

Первая часть системы — уравнение на собственные значения ($\lambda = -k^2$) оператора Лапласа, а вторая — граничные условия. Рассматриваемые топологи-

Михаил Юрьевич Шалагинов, аспирант, School of Electrical and Computer Engineering. *Михаил Геннадьевич Иванов* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. теоретической физики. *Михаил Вячеславович Долгополов* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. общей и теоретической физики; зав. лаб., научно-исследовательская лаборатория математической физики.

ческие поверхности, как уже было отмечено, могут быть представлены в виде области U , представляющей собой прямоугольник размером $a \times b$ ($U = [0, a] \times [0, b]$), у которого границы склеены определённым образом. Основное отличие в постановке задач — граничные условия. Рассмотрим в общем случае, какие граничные условия могут встретиться:

- граничные условия Дирихле: $u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0$;
- граничные условия Неймана: $u'_x(0, y) = u'_x(a, y) = u'_y(x, 0) = u'_y(x, b) = 0$;
- смешанные граничные условия: $\alpha_1 u(0, y) + \beta_1 u'_x(0, y) = 0$, $\alpha_2 u(a, y) + \beta_2 u'_x(a, y) = 0$, $\alpha_3 u(x, 0) + \beta_3 u'_y(x, 0) = 0$, $\alpha_4 u(x, b) + \beta_4 u'_y(x, b) = 0$, здесь α_i и β_i — действительные числа;
- периодические граничные условия, содержащие комплексный фазовый множитель: $u(0, y) = u(a, y)e^{i\varphi_1}$, $u'_x(0, y) = u'_x(a, y)e^{i\varphi_1}$, $u(x, 0) = u(x, b)e^{i\varphi_2}$, $u'_y(x, 0) = u'_y(x, b)e^{i\varphi_2}$.

Условия сшивки со сдвигом фазы позволяют выбрать вещественные собственные функции только в случае, когда сдвиг фазы кратен π , т. е. склейка в фазе или противофазе — периодические или антипериодические граничные условия.

2. Колебания на поверхности листа Мёбиуса. Лист Мёбиуса представляет собой прямоугольник $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ со склеенными вертикальными сторонами, параллельными оси y (рис. 1, а). Между собой склеиваются точки на границе с координатами $(0, y)$ и $(a, b - y)$. В пределе большого отношения a/b лист Мёбиуса можно реализовать почти без растяжений как поверхность с краем в трёхмерном пространстве (рис. 1, б).

Рассмотрим колебания на поверхности листа Мёбиуса, описываемые волновым уравнением для функции (малого смещения) $u(x, y, t)$:

$$u_{tt} - \Delta u = 0. \quad (1)$$

Край листа Мёбиуса свободен, и на нём задано граничное условие Неймана:

$$u'_y(x, 0, t) = u'_y(x, b, t) = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим колебания двух типов: продольные и поперечные (вдоль и перпендикулярно поверхности). Так как мы работаем на листе Мёбиуса и рассматриваемая функция является действительной и непосредственно измеримой, это подразумевает, что решение $u(x, y, t)$ должно быть периодическим

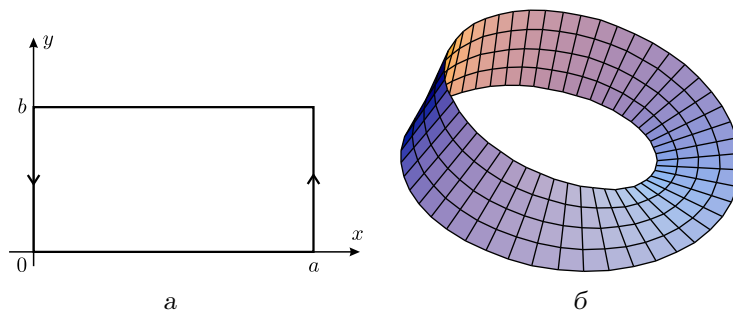


Рис. 1. Лист Мёбиуса: а) схема склеивания листа Мёбиуса из прямоугольника размером $a \times b$; стрелки отображают правила склейки, т. е. в результате склейки направления стрелок должны совпасть; б) реализация листа Мёбиуса в трёхмерном пространстве

в случае продольных колебаний, т. е.

$$u(0, y, t) = u(a, b - y, t), \quad u'_x(0, y, t) = u'_x(a, b - y, t), \quad (3)$$

и антипериодическим по переменной x с периодом a в случае поперечных колебаний:

$$u(0, y, t) = -u(a, b - y, t), \quad u'_x(0, y, t) = -u'_x(a, b - y, t). \quad (4)$$

Будем искать решение волнового уравнения (1) в виде

$$u(x, y, t) = e^{i\omega t}(A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y), \quad (5)$$

причём $\omega^2 = k_x^2 + k_y^2$, что следует из подстановки частного решения (5) в волновое уравнение (1).

Перейдём к рассмотрению условий (2). Легко проверить, что они дают ограничения $D = 0$ и $k_y b = \pi n_2$, где $n_2 \in \mathbb{Z}$.

Далее из граничных условий (3), (4) получим разрешённые значения k_x для продольных и поперечных колебаний соответственно:

$$k_x a = \pi n_2 + 2\pi n_1, \quad k_x a = \pi(n_2 + 1) + 2\pi n_1,$$

где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. На рис. 2 изображено пространство возможных значений k_x и k_y .

В результате для случая продольных колебаний мы приходим к набору следующих функций:

$$u_{n_1, n_2} = e^{i\omega t} \cos \frac{\pi n_2 y}{b} \left(A_{n_1, n_2} \cos \frac{\pi n_2 + 2\pi n_1}{a} x + B_{n_1, n_2} \sin \frac{\pi n_2 + 2\pi n_1}{a} x \right).$$

Можно перейти к очевидно эквивалентному набору (n_1 заменим на m , n_2 — на $2l$ и $2l + 1$):

$$\begin{cases} u_{2l, m} = e^{i\omega t} \cos \frac{2\pi l y}{b} \left(A_{2l, m} \cos \frac{2\pi m}{a} x + B_{2l, m} \sin \frac{2\pi m}{a} x \right), \\ u_{2l+1, m} = e^{i\omega t} \cos \frac{(2\pi l + \pi) y}{b} \left(A_{2l+1, m} \cos \frac{2\pi m + \pi}{a} x + B_{2l+1, m} \sin \frac{2\pi m + \pi}{a} x \right). \end{cases}$$

Для случая поперечных колебаний можно записать набор собственных функций u_{n_1, n_2}^* аналогичным образом:

$$\begin{cases} u_{2l, m}^* = e^{i\omega t} \cos \frac{2\pi l y}{b} \left(A_{2l, m} \cos \frac{2\pi m + \pi}{a} x + B_{2l, m} \sin \frac{2\pi m + \pi}{a} x \right), \\ u_{2l+1, m}^* = e^{i\omega t} \cos \frac{(2\pi l + \pi) y}{b} \left(A_{2l+1, m} \cos \frac{2\pi m}{a} x + B_{2l+1, m} \sin \frac{2\pi m}{a} x \right). \end{cases}$$

Следует заметить, что коэффициенты A и B в общем случае являются комплексными числами.

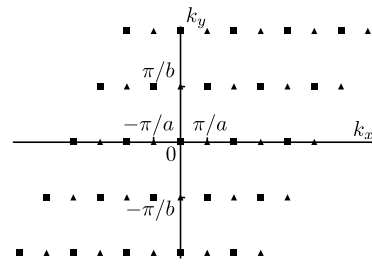


Рис. 2. Пространство волновых чисел k_x и k_y : треугольники соответствуют поперечным колебаниям, квадратики — продольным

3. Спектр на бутылке Клейна. Рассмотрим бутылку Клейна K , которая представляет собой прямоугольник $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ со склеенными определённым образом сторонами (рис. 3, а). На рис. 3, б показано, как может выглядеть бутылка Клейна в трёхмерном пространстве.

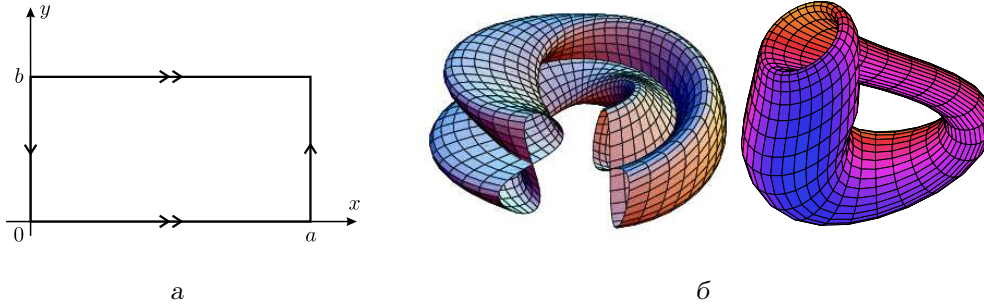


Рис. 3. Бутылка Клейна: а) схема склеивания бутылки Клейна из прямоугольника размером $a \times b$; стрелки отображают правила склейки, т. е. в результате склейки направления стрелок должны совпасть; б) трёхмерные реализации бутылки Клейна, левая показана с разрезом

Из правил склейки (см. рис. 3, а) следует, что функция, заданная на бутылке Клейна, есть функция на \mathbb{R}^2 с условиями

$$U(x, y) = U(x, y + b), \tag{6}$$

$$U(x, y) = U(x + a, b - y). \tag{7}$$

Найдём спектр оператора Лапласа на бутылке Клейна [2] для класса функций дважды непрерывно дифференцируемых на поверхности бутылки Клейна, т. е. $U \in C^2(K)$.

На \mathbb{R}^2 собственные функции оператора Лапласа можно выбрать в виде плоских волн $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$. Попробуем найти собственные функции на бутылке Клейна в виде

$$U_{\mathbf{k}+} = e^{ik_x x} \cos(k_y y), \quad U_{\mathbf{k}-} = e^{ik_x x} \sin(k_y y). \tag{8}$$

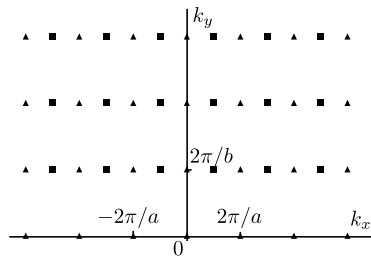


Рис. 4. Пространство волновых чисел k_x и k_y : треугольники — разрешённые значения для $U_{\mathbf{k}+}$, квадратики — разрешённые значения для $U_{\mathbf{k}-}$

Найдём условия, при которых вышеуказанные функции (8) удовлетворяют заданным граничным условиям (6), (7). Из подстановки в (6) следует, что $k_y b = 2\pi n_2$, где $n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Иными словами, по оси y должно укладываться целое число длин волн. Так как собственная функция не должна тождественно обращаться в нуль, то значение $n_2 = 0$ ($k_y = 0$) вполне устраивает $U_{\mathbf{k}+}$, но не годится для $U_{\mathbf{k}-}$, которая содержит $\sin(k_y y)$. Подстановка в (7) даёт $k_x a = \pi n_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}$, причём чётное n_1 (целое число волн)

годится для функции $U_{\mathbf{k}+}$, которая содержит косинус (чётная функция), а нечётное n_1 (полуцелое число волн) для $U_{\mathbf{k}-}$, содержащей синус (нечётная функция). На рис. 4 обозначены точки, координатами которых являются разрешенные пары (k_x, k_y) . Собственные значения оператора Лапласа на

бутылке Клейна соответствуют расстояниям от начала координат до отмеченных точек.

Убедимся в том, что найден полный базис собственных функций. Мы можем ослабить условия на функции: $U(x, y) = U(x + 2a, y) = U(x, y + b)$. Это соответствует рассмотрению вместо бутылки Клейна тора, который дважды покрывает бутылку. На торе полный базис составляют функции $U_{\mathbf{k}\pm}$, только на торе $k_x a = \pi n_1$, $k_y b = 2\pi n_2$, $n_1 \in \mathbb{Z}$, $n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причём на торе любая комбинация n_1, n_2 , если $n_2 \neq 0$, одинаково пригодна и для синуса, и для косинуса. И этот базис на торе, очевидно, полон.

Пространство волновых функций на бутылке Клейна получается как соответствующее подпространство волновых функций на торе, натянутых на часть базисных функций на торе, что обеспечивает полноту найденного базиса.

4. Заряженная частица на поверхности «бублика» в магнитном поле.

Тор представляет собой прямоугольник $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ со склеенными противоположными сторонами (рис. 5, а). Для достаточно большого отношения a/b тор можно реализовать почти без растяжений как поверхность «бублика» в трёхмерном пространстве.

Рассмотрим поведение заряженной квантовой частицы на поверхности тора в присутствии магнитного поля [3]. Если внутри «бублика» существует замкнутое магнитное поле с потоком Φ_1 и через дырку «бублика» проходит поток магнитного поля Φ_2 (рис. 5, б), то волновая функция $\Psi(x, y)$ стационарного состояния заряженной частицы с зарядом e и массой m является собственной функцией гамильтониана

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{e}{\hbar c} A_x(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{e}{\hbar c} A_y(x, y) \right)^2 \right],$$

где $\mathbf{A}(x, y)$ — векторный потенциал, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света. Функция $\Psi(x, y)$ должна также удовлетворять периодическим граничным

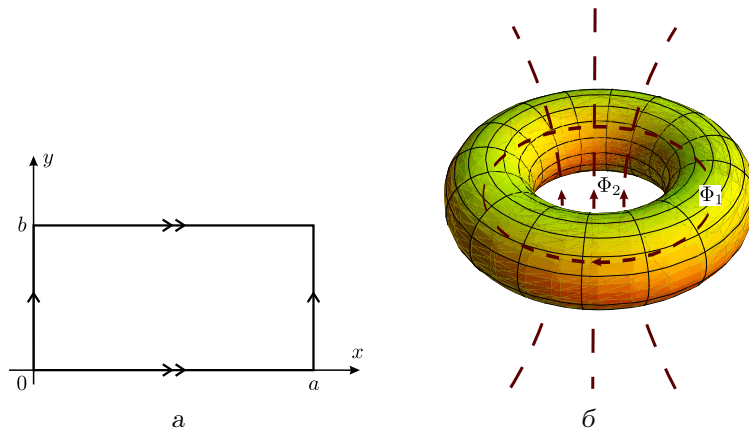


Рис. 5. Тор: а) схема склейки «бублика» из прямоугольника $a \times b$; одинаковыми стрелками отмечены склеиваемые стороны; б) трёхмерное представление «бублика» и конфигурация магнитного поля; поток Φ_1 создан внутри «бублика», поток Φ_2 проходит через дырку «бублика»

условиям, следующим из топологии «бублика» (рис. 5):

$$\Psi(x,0) = \Psi(x,b), \quad \Psi(0,y) = \Psi(a,y), \quad (9)$$

$$\Psi'_y(x,0) = \Psi'_y(x,b), \quad \Psi'_x(0,y) = \Psi'_x(a,y). \quad (10)$$

Можно упростить задачу: если на поверхности тора магнитное поле обращается в нуль, то мы можем сделать разрезы поверхности и с помощью калибровочного преобразования обратить векторный потенциал \mathbf{A}' в нуль на этой поверхности:

$$\mathbf{A}'(x,y) = \mathbf{A}(x,y) - \nabla f(x,y) = 0. \quad (11)$$

Упрощённый гамильтониан будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Тем не менее волновая функция претерпит некоторые изменения: калибровочное (градиентное) преобразование не должно повлиять на вероятность местоположения частицы $|\Psi(x,y)|^2$, т. е. новая волновая функция $\psi(x,y)$ должна отличаться от старой волновой функции $\Psi(x,y)$ только фазовым множителем [4]:

$$\psi(x,y) = \Psi(x,y)e^{-\frac{ie}{\hbar c}f(x,y)}, \quad (12)$$

где $f(x,y)$ — функция градиентного преобразования. Граничные условия для новой функции будут следующими:

$$\psi(x,0) = e^{i\varphi_1}\psi(x,b), \quad \psi(0,y) = e^{i\varphi_2}\psi(a,y), \quad (13)$$

$$\psi'_y(x,0) = e^{i\varphi_1}\psi'_y(x,b), \quad \psi'_x(0,y) = e^{i\varphi_2}\psi'_x(a,y). \quad (14)$$

На \mathbb{R}^2 собственные функции гамильтониана \hat{H}_1 (по сути дела, оператора Лапласа) можно выбрать в виде плоских волн $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$:

$$\psi(x,y) = e^{ik_x x} e^{ik_y y}.$$

Найдём k_x и k_y из граничных условий (13) и (14):

$$k_x = -\frac{\varphi_2}{a} + \frac{2\pi n_2}{a}, \quad k_y = -\frac{\varphi_1}{b} + \frac{2\pi n_1}{b},$$

где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Пространство волновых чисел k_x, k_y представлено на рис. 6.

Собственные значения \hat{H}_1 имеют такой вид:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(-\frac{\varphi_1}{b} + \frac{2\pi n_1}{b} \right)^2 + \left(-\frac{\varphi_2}{a} + \frac{2\pi n_2}{a} \right)^2 \right].$$

Простейшее описание векторного потенциала на поверхности тора соответствует постоянному полю $\mathbf{A}(x,y)$. С помощью граничных условий (9), (10),

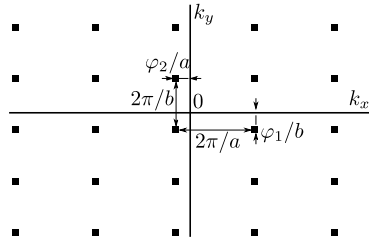


Рис. 6. Пространство волновых чисел k_x, k_y заряженной частицы на поверхности тора, находящегося в магнитном поле

(13), (14) и уравнения (12) можно установить связь между фазовыми множителями φ_1 , φ_2 и функцией градиентного преобразования $f(x, y)$ для такой калибровки:

$$f(x, y) = \frac{\hbar c}{e} \left(\frac{\varphi_2}{a} x + \frac{\varphi_1}{b} y \right).$$

Докажем, что найден полный базис собственных функций \hat{H}_1 . Если рассмотреть тор без сдвига фазы, то получим обычные ряды Фурье. Со сдвигом фазы ряды Фурье получаются не совсем обычные, но к обычным сводящиеся:

$$\psi(x, y) = \exp\left(-i \left(\frac{\varphi_2}{a} x + \frac{\varphi_1}{b} y \right)\right) \cdot \Psi(x, y).$$

Здесь Ψ — обычная периодическая функция, для которой можно записать обычный ряд Фурье как разложение по базису в L_2 , для которого полнота уже доказана. Умножение на $\exp\left(-i \left(\frac{\varphi_2}{a} x + \frac{\varphi_1}{b} y \right)\right)$ с точки зрения пространства L_2 есть унитарное преобразование.

Продолжим рассуждения и найдём, каким образом связаны между собой сдвиги фаз φ_1 , φ_2 и потоки магнитного поля Φ_1 , Φ_2 . Используя теорему Стокса и выражение (11), можно получить, что $\Phi_1 = f(x, b) - f(x, 0)$, $\Phi_2 = f(a, y) - f(0, y)$, и в итоге

$$\Phi_i = \frac{\hbar c}{e} \varphi_i = \Phi_0 \frac{\varphi_i}{\pi},$$

где $i = 1, 2$; Φ_0 — квант магнитного потока. Следует заметить, что в данном случае магнитный поток не квантуется.

Заключение. Рассмотрены задачи с оператором Лапласа на топологических поверхностях: лист Мёбиуса, бутылка Клейна и тор. Такие поверхности интересны тем, что содержат определённые топологические особенности по отношению к стягиванию замкнутой поверхности или кривой в точку, что позволяет интерпретировать граничные условия, например, связывая их со свойствами симметрий в квантовой физике.

Рассмотренные задачи и полученные результаты могут быть полезны при построении теоретических моделей в космологии и физике конденсированного состояния вещества, при рассмотрении точных и нарушенных симметрий в физике частиц.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.2.1.1/10854).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Прасолов В. В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995. 552 с. [*Prasolov V. V.* Illustrative topology. Moscow: MSNMO, 1995. 552 pp.]
2. *Андреев А. А., Белоглазов Г. С., Волович И. В., Данилюк Б. В., Долгополов М. В., Зубарев А. П., Иванов М. Г., Лексина С. В., Пивоварова А. С., Радаев Ю. Н., Родионова И. Н., Рыкова Э. Н., Стерякова А. А.* Математическая физика: задачи и решения открытой студенческой олимпиады СамГУ (Самара, 25 апреля 2009 г.) / Современные проблемы математической физики / Спец. вып. № 2. Самара: Самарск. ун-т, 2010. 69 с. [*Andreev A. A., Beloglazov G. S., Volovich I. V., Danilyuk B. V., Dolgoplov M. V., Zubarev A. P., Ivanov M. G., Leksina S. V., Pivovarova A. S., Radaev Yu. N., Rodionova I. N., Rykova E. N., Steryakova A. A.* Mathematical Physics: Problems and Solutions of Open SSU

- Student Contest Olympiad (Samara, April 25, 2009) / Modern Problems in Mathematical Physics / Special Issue No. 2. Samara: Samarsk. Un-t, 2010. 69 pp.]
3. Белоглазов Г. С., Бобрик А. Л., Волович И. В., Данилюк Б. В., Долгополов М. В., Зубарев А. П., Иванов М. Г., Панина О. Г., Петрова Е. Ю., Родионова И. Н., Рыкова Э. Н., Цирова И. С., Червон С. В., Шалагинов М. Ю. Математическая физика: задачи и решения заочной всероссийской студенческой тренинг-олимпиады по математической и теоретической физике (21–24 мая 2010 г.) / Современные проблемы математической физики / Спец. вып. № 4. Самара: Самарск. ун-т, 2010. 84 с. [Beloglazov G. S., Bobrik A. L., Volovich I. V., Danilyuk B. V., Dolgoplov M. V., Zubarev A. P., Ivanov M. G., Panina O. G., Petrova E. Yu., Rodionova I. N., Rykova É. N., Tsirova I. S., Chervon S. V., Shalaginov M. Y. Mathematical Physics: Problems and Solutions of Distance All-Russian Students Training Contest Olympiad in Mathematical and Theoretical Physics (May 21st–24th, 2010) / Modern Problems in Mathematical Physics / Special Issue No. 4. Samara: Samarsk. Un-t, 2010. 84 pp.]
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3: Квантовая механика. М.: Наука, 1986. 736 с. [Landau L. D., Lifshitz E. M. Theoretical Physics. Vol. 3: Quantum mechanics. Moscow: Nauka, 1986. 736 pp.]

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 20/V/2011.

MSC: 35R01

PROBLEMS WITH LAPLACE OPERATOR ON TOPOLOGICAL SURFACES

*M. Y. Shalaginov*¹, *M. G. Ivanov*², *M. V. Dolgoplov*³

¹ Purdue University,
West Lafayette, 47907, Indiana, USA.

² Moscow Institute of Physics and Technology,
9, Institutskii per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia.

³ Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mails: shalaginov@purdue.edu, mgi@mi.ras.ru, mvdolg@ssu.samara.ru

This work highlights the problems related to the Laplace operator on topological surfaces such as Mobius strip, Klein bottle and torus. In particular, we discuss oscillations on the surface of the Mobius strip, eigenfunctions and eigenvalues of the Laplace operator on the surface of the Klein bottle, as well as behavior of a charged particle on the torus.

Key words: *quantum physics, non-Euclidean topological spaces, quantization, Laplace operator, Mobius strip, Klein bottle, torus.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 20/V/2011.

Mikhail Y. Shalaginov, PhD Student, School of Electrical and Computer Engineering.
Mikhail G. Ivanov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Theoretical Physics.
Mikhail V. Dolgoplov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of General and Theoretical Physics; Head of Lab., Research Lab. of Mathematical Physics.