Baustatik-Baupraxis 9, © 2005, TU Dresden

Entwicklung von Finite-Elemente-Modellen – Stand und Tendenzen

Thomas Grätsch, Klaus-Jürgen Bathe

Massachusetts Institute of Technology
Department of Mechanical Engineering, Cambridge

Zusammenfassung: In diesem Aufsatz werden acht Schlüsselherausforderungen zusammengefasst, welche den Rahmen für zukünftige Entwicklungen in der computer-orientierten Mechanik darstellen. Im Speziellen werden neueste Forschungsergebnisse im Bereich der zielorientierten Finite-Elemente-Fehlerschätzung aufgezeigt.

1 EINFÜHRUNG

Unter dem Begriff der computerorientierten Mechanik versteht man die numerische Behandlung und Simulation von allgemeinen ingenieurwissenschaftlichen Problemen aus vielen Bereichen der Technik, den Naturwissenschaften, den Umwelt- und Geowissenschaften sowie der Medizin. Das wichtigste Werkzeug der computerorientierten Mechanik stellt die Methode der Finiten Elemente dar, die seit ihren Anfängen in den 50er Jahren eine bis heute unaufhörliche Erfolgsentwicklung hinter sich hat.

Trotz großer Fortschritte in der Entwicklung von zuverlässigen und effizienten Finite-Elemente-Formulierungen besteht noch immer ein grosser Forschungsbedarf in der Neu- und Weiterentwicklung von verbesserten Formulierungen und Algorithmen. In diesem Aufsatz soll auf den aktuellen Stand und auf Tendenzen bei Finite-Elemente-Modellierungen eingegangen werden. Zu diesem Zweck werden acht Schlüsselherausforderungen genannt [1, siehe Preface], die den Rahmen für zukünftige Entwicklungen in der computerorientierten Mechanik bilden, und die bereits heutzutage Gegenstand aktueller und weltweiter Forschung sind [1]. Im Anschluß wird exemplarisch für eine Schlüsselherausforderung auf zielorientierte Finite-Elemente-Fehlerschätzung eingegangen.

2 ACHT SCHLÜSSELHERAUSFORDERUNGEN

Im Folgenden werden acht Schlüsselherausforderungen genannt, welche die Kernelemente zukünftiger Forschung und Entwicklung in der computerorientierten Mechanik darstellen.

- Automatische Lösung von mathematischen Modellen und Fehlerabschätzung

Qualitativ hochwertige Finite-Elemente-Netze sollten in optimaler Weise für geometrisch komplexe Strukturen generiert werden können, wobei extreme Elementverzerrungen nicht vorkommen sollten. Im Rahmen des Verifikationsprozesses der numerischen Berechnung sind Fehlerschätzmethoden zu entwickeln, die robust und effektiv sind für eine Vielzahl von praktischen Ingenieurproblemen. Die Fehlerabschätzung ist für die globale Lösung eines gegebenen mathematischen Modells als auch für ausgewählte Zielgrößen vorzunehmen, die von besonderem Interesse in der Berechnung sind. Eine bis heute nicht zufriedenstellend gelöste Aufgabe ist die Entwicklung von Prozeduren zur Fehlerabschätzung von Finite-Elemente-Lösungen mathematischer Modelle industrieller Größenordnung. Die Methoden hierfür sollten zuverlässig und effektiv sein, wobei Effektivität bedeutet, dass die Anwendung von Fehlerschätzmethoden stets weniger aufwändig sein sollte als die Lösung mit einem sehr feinen Gitter [2].

Es wäre ideal, wenn in diesem Rahmen auch eine Fehlerabschätzung des Modellfehlers berücksichtigt würde, d.h. die Fehler erfasst würden, die durch ein falsches mathematisches Modell für das zugrunde liegende Problem auftreten. Diese Fehler sind sehr schwer zu erfassen, und die Forschung ist weit davon entfernt, diese Fehler in praktischen Berechnungen mit Rechenprogrammen automatisch abzuschätzen [3].

- Effektive Methoden für Strömungsprobleme

Aufgrund der Komplexität von allgemeinen Strömungsproblemen besteht ein hoher Bedarf in der Entwicklung und Erforschung von numerischen Verfahren, die auch auf groben Netzen brauchbare Lösungen für hohe Reynoldszahlen ermöglichen. Selbstverständlich lassen sich auf einem Grobnetz keine Details des komplexen Strömungsfelds abbilden, die globale Lösung sollte aber in jedem Fall wiedergegeben werden können. Ein ansteigendes Auflösungsvermögen sollte anschließend unter Verwendung von feiner werdenden Netzen mit optimaler Konvergenzrate vorhanden sein.

Im Sinne einer breiten industriellen Anwendung der Verfahren sollten künstlich zu wählende Parameter vermieden werden.

- Effektive netzfreie Finite-Elemente-Methoden

Netzfreie Finite-Elemente-Methoden zeichnen sich dadurch aus, dass sowohl für die Interpolation als auch für die numerische Integration kein Netz benutzt wird. Trotz gemachter Fortschritte in der jüngeren Vergangenheit sind diese Methoden noch nicht wettbewerbsfähig für allgemeine Problemklassen. Aus diesem Grund besteht hier Forschungsbedarf, wobei neu entwickelte Methoden hinsichtlich ihrer Genauigkeit und ihres Rechenaufwands stets etablierten Finite-Elemente-Methoden gegenüberzustellen sind.

- Entwicklung von Methoden für Mehrfeldprobleme

Im Rahmen von Mehrfeldsimulationen werden Effekte erfasst, die bei der Kopplung und Interaktion verschiedener Feldprobleme auftreten können. Ein Beispiel ist die Kopplung von Fluidfeldern mit Strukturen unter Berücksichtigung thermodynamischer Effekte. Weiter sind in diesem Zusammenhang chemische Reaktionen oder elektro-magnetische Kopplungen zu nennen.

Eine große Herausforderung stellt in diesem Zusammenhang die Mehrfeldsimulation von Phänomenen bei kleinen und großen Skalen dar.

- Entwicklung von Methoden für Mehrskalenprobleme

Ein relativ neues Gebiet der computerorientierten Mechanik befasst sich mit der Erforschung und Entwicklung von Methoden zur Simulation von Mehrskalenproblemen. Hierunter versteht man allgemein die gekoppelte Betrachtung verschiedener mathematischer Modelle, die auf unterschiedlichen Skalen formuliert sind. Ein klassisches Beispiel hierbei ist die Betrachtung eines Rissproblems, bei der die umliegende Struktur in herkömmlicher Weise als Finite-Elemente-Makromodell modelliert wird, während die Vorgänge an der Rissspitze auf der Mikro- oder Nanoebene erfasst werden. Das kann durch eine Kopplung einer molekularen Simulation mit einer Kontinuumsformulierung erreicht werden.

Mehrskalenprobleme finden Anwendung in der Nanotechnologie, in der biomedizinischen Forschung oder auch bei Studien in den Umwelt- und Geowissenschaften.

- Modellieren von Unschärfen und Unsicherheiten

Die Erfassung von Unschärfen und Unsicherheiten in den Berechnungsannahmen ist in vielen Berechnungen wünschenswert und sinnvoll, ist jedoch oftmals noch nicht Bestandteil gegenwärtiger ingenieurpraktischer Berechnungen. Dieses ist umso mehr wünschenswert, da sich die Natur gewöhnlicherweise nicht wiederholt, so dass Unschärfen und Unsicherheiten in den Berechnungsannahmen in die Simulation einfließen sollten.

- Die Simulation des gesamten Lebens einer Struktur

Die Berechnungen der Spannungen usw. während des gesamten Lebens eines Tragwerks oder Systems werden in der Ingenieurpraxis oftmals nicht oder nur sehr vereinfacht vorgenommen. Vielmehr wird größtenteils nur die Anfangskonfiguration eines Systems analysiert und optimiert. Das gesamte Leben einer Struktur beinhaltet jedoch die Betrachtung verschiedener Bauzustände, den Erstzustand, verschiedene Reparaturzustände, Nutzungsänderungen des Systems bis hin zum endgültigen Nutzungsende und Abbau.

In diesem Zusammenhang ist daher die Entwicklung von 'virtuellen Laboren' zur Optimierung des ganzen Lebens von Flugzeugen, Autos, Brücken oder biomedizinischen Geräten wünschenswert.

- Ausbildung - sehr wichtig !

Sämtliche Analysewerkzeuge sind nur von Wert, wenn sie mit gesundem Ingenieurverstand und entsprechendem Fachwissen verwendet werden. Aus diesem Grund sollte die Grundlagenausbildung an Universitäten und Hochschulen der Entwicklung in der computerorientierten Mechanik stets Rechnung tragen. Außerdem ist ein fortwährendes und lebenslanges Lernen in der Praxis nötig, um neue Trends zu verstehen und neue Formulierungen und Algorithmen sicher zu beherrschen.

Zwischenfazit

Sehr leistungsfähige Formulierungen und Algorithmen zur Durchführung von Finite-Elemente-Simulationen sind in vielen Bereichen des Ingenieurwesens bereits vorhanden. Daher sollte jede Neuentwicklung stets mit bereits existierenden Methoden verglichen und verifiziert werden.

Wie angedeutet liegen weitere wichtige Herausforderungen vor uns und wesentliche Errungenschaften, nicht zuletzt in Verbindung mit Fortschritten in der Hardware, sind stets zu erwarten.

Die computerorientierte Mechanik ist die Grundlage zur Auslegung und Berechnung von Strukturen und Systemen. Sie stellt somit einen wichtigen Beitrag zum besseren Verständnis von Entwürfen und Naturvorgängen dar, weshalb sie unsere Lebensqualität nachhaltig verbessern wird.

3 FEHLERSCHÄTZUNG

Am Beispiel der ersten Schlüsselherausforderung, die Anwendung und Entwicklung von Fehlerschätzmethoden für Finite-Elemente-Verfahren, um die Lösung eines gegebenen mathematischen Modells zu erhalten, sollen exemplarisch der gegenwärtige Stand und neueste Entwicklungen aufgezeigt werden.

Das Modellieren von technischen und naturwissenschaftlichen Vorgängen führt zu partiellen Differentialgleichungen in Raum und Zeit, die das mathematische Modell des betrachteten Problems darstellen. Allgemein sind geschlossene Lösungen dieser Gleichungen nicht bekannt, so dass numerische Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) verwendet werden. Wie jedes numerische Approximationsverfahren unterliegt auch die Finite-Elemente-Methode einem numerischen Fehler, dessen Ursachen vielschichtig sein können. An dieser Stelle soll einzig der Diskretisierungsfehler betrachtet werden, welcher aufgrund der polynomialen Approximation der Lösung entsteht. Es wird also angenommen, dass das mathematische Modell gewählt ist und keinem weiteren Fehler unterliegt, und selbst hierbei wird nur der Diskretisierungsfehler betrachtet.

Im Unterschied zu *a priori* Fehlerschätzmethoden, die lediglich Informationen über das asymptotische Verhalten des Diskretisierungsfehlers liefern, werden im Folgenden *a posteriori* Fehlerschätzmethoden behandelt, welche im Idealfall eine gute Fehlerschätzung als auch obere und untere Fehlerschranken für eine vorliegende approximative Lösung eines mathematischen Modells ergeben.

Während in den Anfängen der Forschungstätigkeiten auf dem Gebiet der *a posteriori* Fehlerschätzung Fehlermaße hauptsächlich für die globale Energienorm des zugrundeliegenden Problems hergeleitet und berechnet wurden, geht man in jüngerer Zeit von dem Konzept der zielorientierten Fehlerschätzung aus. Bei diesem Konzept wird die Fehlerabschätzung für eine beliebig wählbare Zielgröße vorgenommen, wie z. B. für die Spannung an einer kritischen Stelle des Bauteils oder die gemittelte Verformung über einen bestimmten Bereich.

Es ist bemerkenswert, dass Fehlerschätzmethoden meistens für einfache lineare Modellprobleme erforscht und analysiert werden, während aus Sicht des Praktikers es doch die entscheidende Frage ist, ob diese Methoden auch für praktische Probleme wie beispielsweise geometrisch komplexe 2D- oder 3D-Modelle oder für nichtlineare und/oder zeitabhängige Mehrfeldprobleme zuverlässig und effektiv sind. In diesem Zusammenhang bedeutet Zuverlässigkeit, dass Fehlerschätzungen genau sein sollten, d.h. möglichst exakte Schätzungen und scharfe untere und obere Fehlerschranken ergeben sollten, während Effektivität bedeutet, dass der Rechenaufwand im Vergleich zum Aufwand zur Lösung des eigentlichen Problems gering sein sollte. In [2] ist in diesem Zusammenhang gezeigt worden, dass effiziente Verfahren stets mit Vorsicht zu verwenden sind, weil allgemein die berechneten Fehlerschranken nicht garantiert sind und fast garantierte Schranken für praktische Probleme meist zu aufwändig oder noch gar nicht vorhanden sind.

3.1 Anforderungen an eine Fehlerschätzmethode

Einige Anforderungen und Charakteristiken einer zuverlässigen und effektiven Fehlerschätzung sind im Folgenden gelistet:

- Die Fehlerabschätzung sollte genau sein, d.h. der vorhergesagte Fehler sollte nahe dem tatsächlichen (unbekannten) Fehler sein.
- Die Fehlerabschätzung sollte asymptotisch exakt sein in dem Sinne, dass mit zunehmender Netzdichte die Fehlerabschätzung mit gleicher Rate gegen Null gehen sollte wie der tatsächliche Fehler.
- Idealerweise sollte die Fehlerschätzung garantierte und scharfe untere und obere Fehlerschranken ergeben.
- Im Vergleich zur erreichten Lösung des zugrunde liegenden mathematischen Modells sollte der numerische Aufwand für die Fehlerschätzung erheblich geringer ausfallen.
- Die Fehlerschätzung sollte robust im Sinne einer breiten Anwendbarkeit für unterschiedliche mathematische Modelle sein (einschließlich nichtlinearer und zeitabhängiger Modelle und Mehrfeldsimulationen).
- Jede Fehlerschätzung sollte eine adaptive Netzverfeinerung ermöglichen, bei der das Netz hinsichtlich einer gewählten Zielgröße optimiert werden kann.

Eine ideale Fehlerschätzmethode, die alle genannten Anforderungen erfüllt, existiert bis heute nicht. Das Bemerkenswerte ist jedoch, dass es selbst für lineare Probleme allgemein nicht möglich ist, einfach zu berechnende und vor allem garantierte Fehlerschranken zu benutzen.

Aus ingenieurpraktischer Sicht sind die Anforderungen leicht veranschaulicht. Ein Praktiker möchte durch die Anwendung von Fehlerschätzmethoden bei der statischen Analyse einer gelochten Zugscheibe wie in Abb. 1 dargestellt (Symmetriemodell) mit nicht zu großem Aufwand eine genaue Fehlerabschätzung erhalten, die idealerweise auf garantiert maximal (absoluten) Fehlerschranken basiert, die den Fehler in den Verschiebungen und Spannungen an jeder Stelle der Struktur angeben.

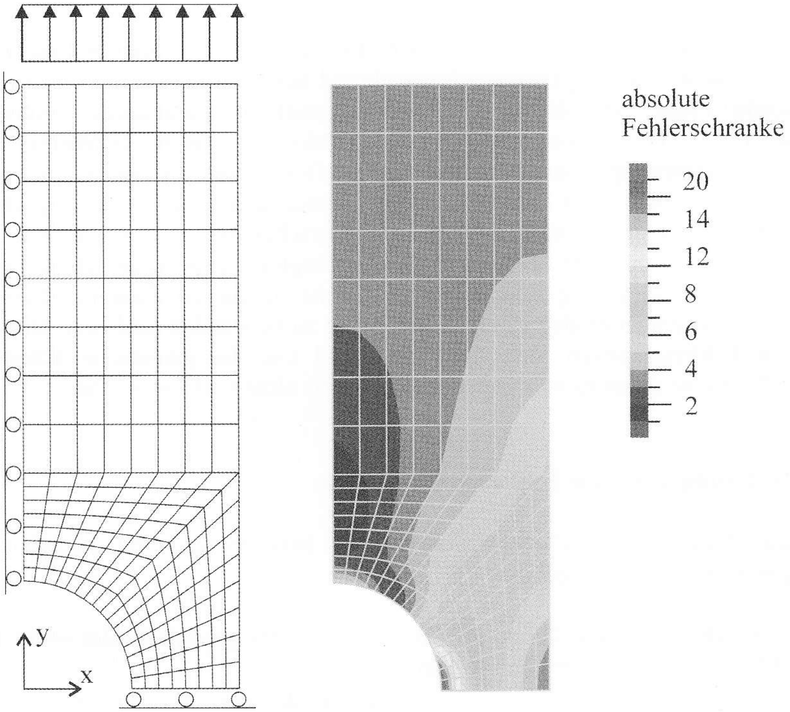

Abbildung 1: Die "ideale Fehlerschätzung" der FEM, die es leider nicht gibt: garantierte maximale absolute Fehlerschranken an jeder Stelle der Struktur

Sei diese Lösung die "ideale Fehlerschätzung" der FEM genannt. Mit der idealen Fehlerschätzung könnte der Praktiker jetzt das Netz an den Stellen verfeinern, an denen der Fehler groß ist, und bei jeder neuen Lösung eine neue Schätzung vornehmen. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass eine wesentliche Anforderung an derartige Fehlerschätzungen darin besteht, dass der zugehörige Rechenaufwand sehr viel kleiner als der Aufwand einer Berechnung mit einem sehr feinen Netz sein sollte.

Wie bereits angemerkt besteht zwischen dem heutigen Stand von Fehlerschätzmethoden und der oben erwähnten idealen Fehlerschätzung eine enorme Diskrepanz. Grundsätzlich lässt sich hierbei feststellen, dass heutige Fehlerschranken für ausgewählte Zielgrößen entweder (theoretisch) garantiert, aber praktisch nicht berechenbar sind, oder sie sind berechenbar, aber nicht garantiert, und das gilt ganz allgemein [2].

Darüber hinaus sind nicht garantierte, aber berechenbare Fehlerschranken für praktische Probleme sehr aufwändig zu berechnen, und der Rechenaufwand übersteigt den der eigentlichen Berechnung um ein Vielfaches. Dieses wird als Hauptgrund dafür angesehen, dass in der Ingenieurpraxis automatische Fehlerschätzmethoden bis heute eine eher untergeordnete Rolle spielen und sich deren Anwendung meistens auf Glättungsmethoden auf Basis unstetiger Spannungsverläufe beschränkt.

3.2 Grundlagen der zielorientierten Fehlerschätzung

Im Folgenden sollen einige neue Entwicklungen aufgezeigt werden, die im Bereich der zielorientierten Fehlerschätzung erreicht wurden. Es wird das abstrakte Modellproblem betrachtet:

Finde $U \in \mathcal{V}$, so dass

$$B(U,V) = F(V) \qquad \forall\, V \in \mathcal{V} \tag{1}$$

Hierbei stellt B(.,.) eine symmetrische Bilinearform und F(V) ein lineares Funktional auf dem Funktionenraum $\mathcal{V}$ dar. Ferner ist U die Lösung des mathematischen Modells und V eine beliebige Testfunktion aus $\mathcal{V}$.

Unser Ziel ist es nun, bestimmte Eigenschaften der Lösung zu bestimmen, die ihrerseits durch ein anderes (lineares) Funktional $Q \in \mathcal{V}$ definiert sind. Man bezeichnet Q(U) auch als Zielgröße, welche am Beispiel der linearen Elastizitätstheorie der gemittelten Spannung über einen kritischen Bereich oder der Verschiebung an einer bestimmten Stelle des Tragwerks entsprechen kann.

Die zielorientierte Fehlerschätzung basiert nun auf einem zum eigentlichen Problem dualen Problem, welches abstrakt lautet:

Finde $Z \in \mathcal{V}$, so dass

$$B(Z,V) = Q(V) \qquad \forall\, V \in \mathcal{V} \tag{2}$$

Die Lösung Z des dualen Problems kann hierbei als Einflussfunktion für die Zielgröße Q(U) gedeutet werden und erhält somit eine direkte baustatische Interpretation.

Die Ausgangsgleichung zur zielorientierten Fehlerschätzung erhält man durch Wählen von $V = E_h$ in Gl. (2), wobei $E_h = U\text{-}U_h$ den Fehler zwischen der unbekannten Lösung und der Finite-Elemente-Approximation darstellt

$$Q(E_h) = B(Z,E_h) = F(Z) - B(U_h,Z) \tag{3}$$

Diese lässt sich durch Anwenden der Galerkin-Orthogonalität $B(E_h,V_h) = 0$ weiter umformen zu

$$Q(E_h) = B(Z\text{-}Z_h,E_h) = F(Z\text{-}Z_h) - B(U_h,Z\text{-}Z_h) \tag{4}$$

wobei Z_h die Finite-Elemente-Lösung der Einflussfunktion bezeichnet. Eine garantierte obere Schranke des Fehlers in der Zielgröße erhält man durch die elementweise Betrachtung

$$Q(E_h) \leq \Sigma\, \eta_k \tag{5}$$

mit

$$\eta_k = |\, F(Z\text{-}Z_h)_k - B(U_h,Z\text{-}Z_h)_k\, | \tag{6}$$

wobei der Index k das Volumen eines einzelnen finiten Elements bezeichnet. Eine Fehlerabschätzung erhält man durch

$$Q(E_h) \approx \Sigma\, \eta_k \tag{7}$$

mit

$$\eta_k = F(Z^+\text{-}Z_h)_k - B(U_h,Z^+\text{-}Z_h)_k \tag{8}$$

wobei Z^+ eine verbesserte Approximation von Z bezeichnet, die entweder auf einem feineren Netz oder mit höheren Ansatzfunktionen erzielt wurde. Selbstverständlich ist auch die Evaluierung der oberen Fehlerschranke in Gl. (5) mit einer Approximation der unbekannten Lösung Z verbunden.

3.3 Zielorientierte Fehlerschätzung in der Schalenstatik

Bezeichne Gl. (1) das Variationsproblem der linearen Schalenstatik, basierend auf einer degenerierten dreidimensionalen Kontinuaformulierung mit der bekannten Reissner-Mindlin-Hypothese und der Annahme einer verschwindenden Normalspannung in Schalendickenrichung [3, 4], dann kann der Fehler in einer beliebigen linearen Zielgröße aus

$$Q(E_h) = \int F \cdot Z_{ref}\, dV - \int F \cdot Z_h\, dV \tag{9}$$

berechnet werden, wobei Z_{ref} die exakte Einflussfunktion auf einem 3D-Referenzgebiet bezeichnet. In [5] ist gezeigt worden, dass für die gelösten Probleme die Approximation der unbekannten Einflussfunktion mit MITC-Schalenelementen effektiv ist, wobei Z_h eine MITC4-Lösung darstellt, während Z_{ref} auf einem MITC9-Netz mit gleicher Elementzahl approximiert werden kann.

Für das bekannte Scordelis-Lo-Schalenbeispiel in Abb. 2 treten hohe Spannungswerte bezüglich der Biegemomente in Schalenmitte, der Schubspannungen in der Nähe der Auflager und der Membranspannungen an den Längsseiten auf. Aus diesem Grund sollen im Rahmen der Fehlerschätzung folgende Zielgrößen untersucht werden:

$$Q_1(U) = |\,\Omega_1\,|^{-1} \int z\, \sigma_{rr}(U)\, d\Omega_1 \tag{10}$$

$$Q_2(U) = |\,\Omega_2\,|^{-1} \int \sigma_{rs}(U)\, d\Omega_2 \tag{11}$$

$$Q_3(U) = |\,\Omega_3\,|^{-1} \int \sigma_{ss}(U)\, d\Omega_3 \tag{12}$$

Hierbei bezeichnet (r,s,z) ein lokales kartesisches Koordinatensystem.

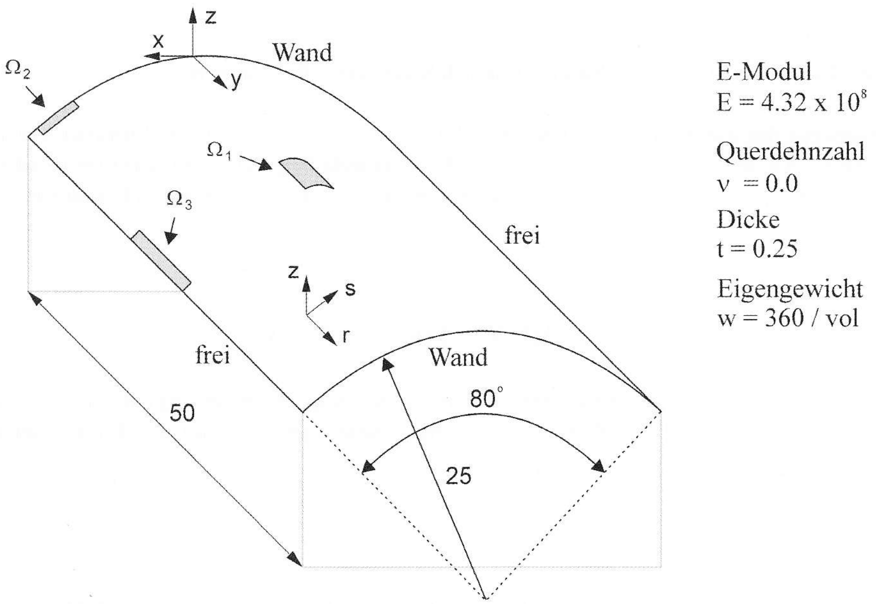

Abbildung 2: Scordelis-Lo-Schale; System und Abmessungen sowie Definition der drei Flächen, auf denen die Zielgrößen ausgewertet werden

Die zugehörige Referenzlösung basiert auf einem uniformen MITC9-Elementnetz von 100 x 100 Elementen (Anzahl der Freiheitsgrade: 201 000). Um die Genauigkeit einer Fehlerschätzung zu bewerten, wird noch der Effektivitätsindex eingeführt, der den Quotienten vom geschätzten zum exakten Fehler darstellt. Zur Fehlerschätzung wird ein Ansatz auf Basis von Gl. (9) verwendet. Wie in Abb. 3 zu sehen ist, konvergiert der geschätzte Fehler schnell und der zugehörige Effektivitätsindex ist nahe 1.0.

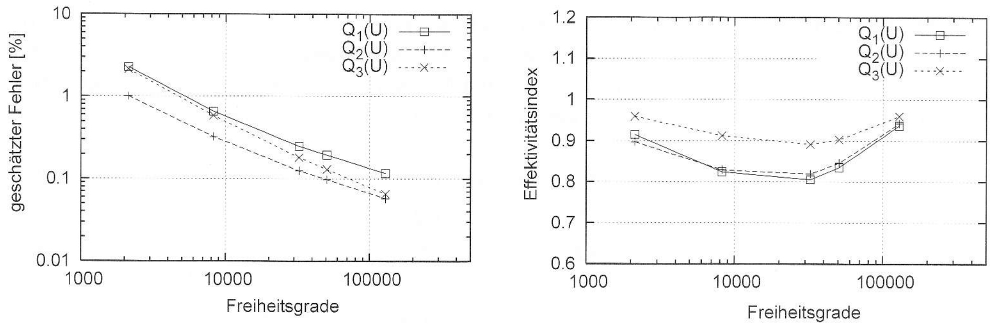

Abbildung 3: Ergebnisse der zielorientierten Fehlerschätzung für die Scordelis-Lo-Schale

3.4 Zielorientierte Fehlerschätzung bei nichtlinearen Problemen

Das Konzept der zielorientierten Fehlerschätzung lässt sich auch auf nichtlineare Probleme übertragen. An dieser Stelle soll jedoch nur die zugrunde liegende Idee skizziert werden. Im Vergleich zu Gl. (1) wird nun das folgende nichtlineare Variationsproblem betrachtet:

Finde $U \in \mathcal{V}$, so dass

$$A(U;V) = F(V) \qquad \forall\, V \in \mathcal{V} \tag{13}$$

Hierbei ist $A(.;.)$ eine Semilinearform, welche nichtlinear im ersten und linear im zweiten Argument ist. Das duale Problem wird nun im Linearisierungspunkt der Finite-Elemente-Lösung betrachtet: Finde $Z \in \mathcal{V}$, so dass

$$A'(U;Z,V) = Q'(U;V) \qquad \forall\, V \in \mathcal{V} \tag{14}$$

wobei $A'(.;.,.)$ die Tangentialform der nichtlinearen Newton-Iteration und $Q'(.;.)$ eine entsprechende Richtungsableitung des Funktionals darstellt. Der Fehler in der Zielgröße kann nun im Linearisierungspunkt der Finite-Elemente-Lösung durch

$$Q'(U_h;E_h) = A'(U_h;Z,E_h) = F(Z) - A'(U_h;Z_h,U_h) \tag{15}$$

angegeben werden. Da die Berechnung der Form $A'(U_h;Z_h,U_h)$ im Praktischen nicht ohne weiteres möglich ist, wird zur Approximation ein Differenzenausdruck vorgeschlagen [6]

$$A'(U_h;Z_h,V) \approx \varepsilon^{-1}\,[\,A(U_h+\varepsilon Z_h;V) - A(U_h;V)\,] \tag{16}$$

Hierbei stellt ε eine numerisch sehr kleine Zahl dar, welche selbstadaptiv so gewählt werden kann, dass der zusätzliche Term εZ_h nur noch einen linearen Beitrag zur Lösung $U_h+\varepsilon Z_h$ in Gl. (16) liefert. Diese Vorgehensweise ist generell anwendbar für viele Probleme, aber Fehler in material-nichtlinearen Problemlösungen zu erfassen, ist ganz besonders schwierig [7].

4 ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Aufsatz wurden die acht Schlüsselherausforderungen für zukünftige Entwicklungen und Tendenzen in der computerorientierten Mechanik aufgezeigt [1, Preface]. Jede Neuentwicklung sollte jedoch stets gegen bereits bestehende Formulierungen und Algorithmen verifiziert werden. Am Beispiel einer genannten Schlüsselherausforderung, der Fehlerabschätzung in der Lösung eines mathematischen Modells, wurden exemplarisch einführende Hinweise zum gegenwärtigen Stand und zu einer möglichen Anwendung für praktische Probleme des Ingenieurwesens aufgeführt. Einige Neuentwicklungen wurden am Beispiel der zielorientierten Fehlerschätzung skizziert.

LITERATUR

[1] Bathe, K.J. (ed.)
Computational Fluid and Solid Mechanics 2003
Elsevier, 2003

[2] Grätsch, T.; Bathe, K.J.
A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis
Computers & Structures, 83(2005), pp. 235-265

[3] Bathe, K.J.
Finite Element Procedures
Prentice Hall, 1996

[4] Chapelle, D.; Bathe, K.J.
The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals
Springer, 2003

[5] Grätsch, T.; Bathe, K.J.
Influence functions and goal-oriented error estimation for finite element analysis of shell structures
International Journal for Numerical Methods in Engineering; in press

[6] Grätsch, T.; Bathe, K.J.
Goal-oriented error estimation in the analysis of fluid flows with structural interactions; in preparation

[7] Kojic, M.; Bathe, K.J.
Inelastic Analysis of Solids and Structures
Springer, 2005